Topološka K-teorija

Beleške [Y] sa seminara o K-teoriji prof. dr B. Prvulovića

Tokom poslednje dekade se u fiziku periodičnih sistema sve više uvodi topologija, pre svega u vezi sa Berijevom (Zakovom) fazom i krivinom. Od prvobitnih, diferencijalno-geometrijskih razmatranja, pojavom topološke kvantne hemije i teorije simetrijskih indikatora, stiglo se do kombinatorne topologije. Pošto je glavni objekat istraživanja raslojenje bilo realno (kod energetskih zona) ili kompleksno (svojstveni vektori) vektorsko raslojenje, prirodni razvoj ove teorije zahteva analizu raslojenih prostora, i različite matematičke operacije sa njima, čime se dolazi do K-teorije. Dodaci sadrže minimalno predznanje iz drugih matematičkih oblasti.

Sadržaj

1 Vektorska raslojenja

1.1 Struktura raslojenja i osnovne definicije

Definicija 1 Vektorsko raslojenje dimenzije (ranga) *n je neprekidno preslikavanje (*projekcija*) $p : E \to B$* totalnog prostora *E na* bazu *B (oznaka $E \xrightarrow{p} B$), pri čemu*
*$\forall b \in B\ \exists U \subset B$ takva da postoji homemorfizam $h:\ p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}$ (*lokalna trivijalizacija*) za koju je $\forall b \in B\ h : p^{-1}(b) \to b \times \mathbb{K}^n$ je izomorfizam vektorskih prostora (dimenzije n).*

Element raslojenja je *tačka*, a U_b oznaka za okolinu tačke. Na lokalnoj trivijalizaciji je element raslojenja (b, x), $b \in B$, $x \in \mathbb{K}^n$. Ovo se može predstaviti komutativnim dijagramom
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{K}^n \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}.$$

Definicija 2 *Dva raslojenja $E \xrightarrow{p} B$ i $F \xrightarrow{q} B$ nad istom bazom B su* ekvivalentna *(*izomorfna*), $E \cong F$, ako postoji homeomorfizam $\varphi : E \to F$ za koji je $\forall b \in B,\ q^{-1}(b) = \varphi(p^{-1}(b))$ izoorfizam vektorskih prostora, tj. ako komutativan dijagram*
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
. Trivijalno *je raslojenje ekvivalentno proizvodnom. $B \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{p} B$. Klasa ekvivalencije raslojenja $E \xrightarrow{p} B$ se označava sa $[E]$; specijalno, klasa trivijalnog raslojenja dimenzije n se označava sa $\underline{n} = [B \times \mathbb{K}^n]$, za $n = 0, 1, \ldots$ (polje i baza se podrazumevaju).*

Primeri:

1. Za svako B i $\mathbb{K}$ *proizvodno (trivijalno)* raslojenje $B \times \mathbb{K}^n$. Specijalno, za $n = 0$, tačkasto raslojenje je trivijalno za svako B.

2. Za $B = S^1$ (1D-sfera=kruznica) dva realna linijska raslojenja $S^1 \times \mathbb{R}$ (cilindar) i M (Möbius-ov list).

3. $B = S^n$ (n-sfera utopljena u ambijent $\mathbb{R}^{n+1}$):

   - Tangentno raslojenje $TS^n = \{(x, v) \mid x \in S^n,\ v \in \mathbb{R}^{n+1}, v \perp x\}$. Projekcija $p(x, v) = x$. Dve hemisfere su jedan pokrivač (sa trivijalizacijom, a na preseku (ekvator) treba zašiti).
   - Normalno raslojenje $NS^n = \{(x, v) \mid x \in S^n,\ v = \lambda x\}$. Projekcija $p(x, v) = x$.

Teorem 1 *1. NS^n je trivijalno. 2. TS^n je trivijalno samo za $n = 1, 3, 7$.*

▬*Dokaz:* 1. Neka je $\varphi : NS^N \to S^n \times \mathbb{R}^1$ defnisano sa $\varphi(x, v) = (x, \langle x \mid v \rangle)$. Preslikavanje je neprekidno, globalno i bijektivno, uz inverzno preslikavanje $\varphi^{-1}(x, \lambda) = (x, \lambda x)$, za koje se vidi da je neprekidno po x i λ.

2. Provera za $n = 1$: u kompleksnoj ravni kruznica je $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Onda je $TS^1 = \{(z, \lambda \mathrm{i}z),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, a $\varphi : (z, \lambda \mathrm{i}z) \mapsto (z, \lambda)$ je globalni izomorfizam. ▮

Definicija 3 *Ako je $E \xrightarrow{p} B$ raslojenje i E_0 podskup u E takav da je $\forall b\ p^{-1}(b) \cap E_0 \leq p^{-1}(b)$, tada je $E_0 \xrightarrow{p} B$ (podrazumeva se suženje preslikavanje, $p|_{E_0}$)* podraslojenje *u E.*

1.2 Poluprsten raslojenja nad istom bazom

Skup svih klasa (ekvivalencije) n-dimenzionalnih raslojenja nad bazom B se oznacava sa $\mathrm{Vect}^n(B)$, dok je $\mathrm{Vect}(B) = \bigsqcup_n \mathrm{Vect}^n(B)$. U ovom skupu se definišu sledeće operacije:

Zbir raslojenja $E \xrightarrow{p} B$ i $F \xrightarrow{q} B$ je raslojenje $E \oplus F \xrightarrow{\alpha} B$ takvo da je $\forall b\ \alpha^{-1}(b) = p^{-1}(b) \oplus q^{-1}(b)$. Dakle, iz Dekartovog proizvoda se uzimaju samo parovi sa istim projekcijama: $E \oplus F = \{(v, w) \mid p(v) = q(w)\}$ (naravno $p(v) = q(w) = \alpha(v, w)$). Sabiranje ima sledeće osobine:

1. Proširivo je na klase: $E \cong E'$ i $F \cong F'$ povlači $E \oplus F \cong E' \oplus F'$, pa je definisano $[E] \oplus [F] = [E \oplus F]$.
2. Komutativno je (u smislu ekvivalencije).
3. Asocijativno je.
4. Neutralni element je $\underline{0}$.

Teorem 2 *$(Vect(B), \oplus)$ je Abelova polugrupa (zapravo monoid).*

Ali nema skraćivanja: $\tau \oplus \rho = \sigma \oplus \rho$ ne povlači $\tau = \sigma$ (primer 3 dole). Primeri:

1. $\underline{n} \oplus \underline{m} = \underline{n+m}$
2. $TS^n \oplus NS^n \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$: neka je $\varphi : TS^n \oplus NS^n \to S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ definisano sa $\varphi((x, v), (x, w)) = (x, v + w)$. Ali za svaki $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ i svako $x \in S^n$, može se naći projekcija na x i ortokomplement pravca x, tj. jedinstveni su i glatko povezani elementi $(x, u^{\perp})$ i $(x, u^{\|})$ iz TS^n i NS^n. Ovo dokazuje globalnu trivijalizaciju.

3. Generalno za tangentno raslojenje mnogostrukosti utopljene u $\mathbb{R}^{n+1}$: $\tau_n \oplus \underline{1} = \underline{n+1} = \underline{n} + \underline{1}$; vidi se da nema skraćivanja, jer je τ_n generalno netrivijalno (gornji primer sfera).

4. Mebijusov list: $M \oplus M \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$, trivijalno raslojenje kao zbir dva netrivijalna.

Tenzorski proizvod raslojenja $E \xrightarrow{p} B$ i $F \xrightarrow{q} B$ je raslojenje $E \otimes F \xrightarrow{\alpha} B$ takvo da je $\forall b\ \alpha^{-1}(b) = p^{-1}(b) \otimes q^{-1}(b)$. Ima sledeće osobine:

1. Operacija je proširiva na klase: $E \cong E'$ i $F \cong F'$ povlači $E \otimes F \cong E' \otimes F'$, pa je definisano $[E] \otimes [F] = [E \otimes F]$.

2. Komutativno je (u smislu ekvivalencije).

3. Asocijativno je.

4. Distributivno sa sabiranjem: $E \otimes (F \oplus G) \cong E \otimes F \oplus E \otimes G$.

5. Važi: $\underline{0} \otimes [E] = \underline{0}$.

6. Važi: $\underline{1} \otimes [E] = [E]$.

Teorem 3 *$(Vect(B), \oplus, \otimes)$ je poluprsten (sa jedinicom).*

1.3 Orijentacija i metrika

Definicija 4 *1.* Orijentacija realnog vektorskog prostora *je klasa bazisa koji su povezani nesingularnim operatorima pozitivne determinante.*
2. Orijentacija realnog vektorskog raslojenja *je skup orijentacija svih slojeva $p^{-1}(b)$ takvih da za svako b postoji okolina U_b sa lokalnom trivijalizacijom koja daje apsolutni (kanonski) bazis.*

Posto je prelaz među apsolutnim bazisima jedinicna matrica, zapravo se traži postojanje okolina koje odrzavaju/produžavaju orijentaciju.

Primer:

1. Proizvodno raslojenje je orijentisano jer ima kanonsku orijentaciju (apsolutni bazis u svakoj tački b). Zato je i svako trivijalno (ekvivalentnoo proizvodnom) raslojenje orijentabilno, a izborom izomorfizma sa proizvodnim raslojenjem se bira orijentacija.

2. Cilindar je $S^1 \times \mathbb{R}$ i samim tim orijentisan.

3. Mebijusov list nema orijentaciju.

4. Orijentacija u $\mathbb{C}^n$ se nasleđuje iz $\mathbb{R}^{2n}$ nakon dekompleksifikacije. Međutim, pošto svaka transpozicija bazisa u $\mathbb{C}^n$ povlači paran broj transpozicija dekompleksifikovanog bazisa, determinanta matrice prelaska je pozitivna, tj. kompleksna raslojenja su u ovom smislu sva orijentisana. Zapaziti, da parno dimenzionalna realna raslojenja ne moraju biti dekompleksifikovana kompleksna cak ni kad su orijentabilna (primer je verovatno tek dimenzije 6?).

Definicija 5 Metrika *(skalarni proizvod) na raslojenju* $E \xrightarrow{p} B$ *je neprekidno preslikavanje* $\mu : E \times E \to \mathbb{K}$*, tako da je takvo da je* $\forall b \quad \mu : p^{-1}(b) \times p^{-1}(b) \to \mathbb{K}$ *metrika u vektorskog prostora.*

Teorem 4 *1. Ako je baza parakompaktna onda metrika postoji.*
2. Ako je B *parakompaktan i* $E_0 \leq E$ *podraslojenje, tada je i* $E_0^{\perp}$ *(poslojni ortokomplementi) podraslojenje, i važi* $E_0 \oplus E_0^{\perp} = E$*.*
3. Ako je B *kompaktan, tada za svako raslojenje* $E \xrightarrow{p} B$ *postoji raslojenje* $F \xrightarrow{p} B$ *takvo da je* $E \oplus F$ *trivijalno.*

Posledica trećeg iskaza je da ako je B kompaktan, tada za klasu $\sigma \in \mathrm{Vect}(B)$ postoji klasa $\tau \in \mathrm{Vect}(B)$, tako da je $\sigma \oplus \tau = \underline{n}$, gde je n dimenzija ambijentalnog prostora ($\mathbb{R}^n$) naime, pošto je je svako raslojenje nad kompaktnim B podraslojenje nekog trivijalnog (dimenzije npr. n), onda se uzme poslojni ortokomplement, te je τ klasa tog oortokomplementa.

Druga posledica je vezana za tangentno raslojenje prostora utpljenog u $\mathbb{R}^n$: TM je podraslojenje u trivijalnom $M \times \mathbb{R}^n$. Tada se normalno raslojenje definiše kao poslojni ortokomplement, pa važi $TM \oplus T^{\perp}M = \underline{n}$.

2 Povlačenje: funktor sa Top u CommSemiRings

Pokazano je da je $\mathrm{Vect}(B)$ Abelov poluprsten. Prirodno ulaganje (podskupa) u bazu vektorskog raslojenja omogućava jedoznačno konstrukciju raslojenja nad podskupom, restrikcijom skupa fibri na podskup baze.

Definicija 6 *Ako je* $X \xrightarrow{f} B$ *neprekidno preslikavanje, tada je* povlačenje $f^*(E)$ *raslojenja* $E \xrightarrow{p} B$ *na* X *raslojenje* $f^*(E) \xrightarrow{f^*(p)} X$ *definisano sa* $f^*(E) = \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\} \subset X \times E$ *sa prirodnom projekcijom* f^*p*:* $f^*p(x,e) = x$*,* $(f^*p)^{-1}(x) = \{x\} \times p^{-1}f^{(}x)$*.*

Očigledno se i lokalne trivijalizacije mogu shvatiti kao povlačenja sa trivijalnih raslojenja:
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & U \times \mathbb{K}^n \arrow[d, "p_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$
. Takođe, ako je f ulaganje ($X \subset B$), onda je f^* restrikcija raslojenja.

Osobine povlačenja $f^* : \text{Vect}(B) \to: \text{Vect}(X)$:

1. $E \cong F \;\Rightarrow f^*(E) \cong f^*(F)$;
2. $f^*(\underline{n}) = \underline{n}$;
3. $f = \text{const} \;\Rightarrow \text{f}^*(\text{E}) = \underline{\text{dimE}}$;
4. $f^*(E \oplus F) \cong f^*(E) \oplus f^*(F)$;
5. $f^*(E \otimes F) \cong f^*(E) \otimes f^*(F)$;
6. $\mathbb{1}_B^*(E) \cong E$, tj. $\mathbb{1}_B^* = \mathbb{1}_{\text{Vect}(B)}$;
7. $(f \circ g)^*(E) \cong g^*(f^*(E))$, tj. $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} B \;\Rightarrow\; \text{Vect}(B) \xrightarrow{f^*} \text{Vect}(X) \xrightarrow{g^*} \text{Vect}(Y)$.

Sledi da je $\text{Top} \xrightarrow{\text{Vect}} \text{CommSemiRing}$ kontravarijantni funktor. Ovde je Vect oznaka za funktor povlačenja.

3 Klasifikacija vektorskih raslojenja

Teorem 5 *Presek dve trivijalizujuće okoline definiše* funkciju zašivanja *(clutching), $U \bigcap V \to GL_n(\mathbb{K})$ (polje nad presekom nesingularnih matrica).*

▬*Dokaz:* Neka je $E \xrightarrow{p} B$ raslojenje, sa okolinama U i V. Tada je

$$\begin{tikzcd} p^*(U) \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{K}^n \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

i

$$\begin{tikzcd} p^*(V) \arrow[rr, "h_V"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times \mathbb{K}^n \arrow[dl, "p_V"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

. Za svaku tačku b preseka je kompozicija preslikavanja $\{b\} \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{h_U^{-1}} p^{-1}(b) \xrightarrow{h_V} \{b\} \times \mathbb{K}^n$ nesingularni operator. ▮

Primer: Sfera S^k se mora kartografisati sa bar dve okoline; standardno se koriste severna i južna hemisfera, $S^k_\pm$, čiji je presek ekvator, tj. sfera S^{k-1}. Stoga su moguća raslojenja zapravo preslikavanja $S^k_+ \times \mathbb{K}^n \to S^k_- \times \mathbb{K}^n$, tj. matrične funkcije zasivanja (iz Teorema) $(x, v) \mapsto (x, f(x)v)$ gde x prelazi po ekvatoru. Jasno je i obrnuto: takva funkcija definiše raslojenje, pa se piše E_f Ovo može da se uopšti, kao što ce se videti u narednom tekstu (suspenzije).

3.1 Raslojenja nad sferama

Teorem 6 *U $Vect^n(S^k)$ homotopne zašivajuće funkcije f i g generišu izomorfna raslojenja E_f i E_g.*

To uspostavlja surjekciju (jer se za svako raslojenje nalazi njegovo f) klasa: $[S^{k-1}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})] \twoheadrightarrow \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}(S^k)$, te klasa homotopije $[f]$ određuje klasu raslojenja $[E_f \to S^k]$. Obrnuto važi samo za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zbog povezanosti $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, te je u pitanju bijekcija; kod realnih raslojenja važi bijektivnost za klasu orijentacije, ali može postati bijekcija za dovoljno veliko n:

Teorem 7 *1. $Vect^n_{\mathbb{C}}(S^k) \cong \pi_{k-1}(U(n))$;*
2. $Vect^{n+}_{\mathbb{R}}(S^k) \cong \pi_{k-1}(SO(n))$.

▬*Dokaz:* $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k) = [S^{k-1}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \cong [S^{k-1}, U(n)] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_{k-1}(U(n))$. $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(S^k) \twoheadleftarrow [S^{k-1}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})] \cong [S^{k-1}, O(n)] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_{k-1}(O(n))$, ali je ovo ograničeno na orijentisana raslojenja, jer zašivanje mora da održi orijentaciju: $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(S^k)^+ = [S^{k-1}, GL^+_n(\mathbb{R})] \stackrel{\mathrm{def}}{=} [S^{k-1}, \mathrm{SO}(n)] = \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(n))$. ▮

Primeri[1]:

1. $k=1$: $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^1) = \pi_0(U(n)) = 0$, tj. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(S^1) = \{\underline{n} \mid n = 0, 1, \dots\}$: svako kompleksno raslojenje nad kružnicom je trivijalno.

2. $k=1$: $\mathrm{Vect}^{n+}_{\mathbb{R}}(S^1) = \pi_0(\mathrm{SO}(1)) = \pi_0(*) = 0$, tj. $\mathrm{Vect}^+_{\mathbb{R}}(S^1) = \{\underline{n} \mid n = 0, 1, \dots\}$: svako orijentisano realno raslojenje nad kružnicom je trivijalno. Ali nad kružnicom postoje i cilindar (orijentisano raslojenje) i Möbiusov list (neorijentisano). Generalno, pošto je $M \oplus M = \underline{2}$, $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(S^1) = \{\underline{n}, M \oplus \underline{n-1}\}$.

3. Linijska raslojenja $n = 1$. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(S^k) = \pi_{k-1}(U(1)) \cong \pi_{k-1}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } k = 2; \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, tj. za $k \neq 2$ svako kompleksno linijsko raslojenje je trivijalno $\underline{1}$. Za $k = 2$ raslojenja obeležena sa $[\gamma_m]$, $m \in \mathbb{Z}$.

4. $n = 2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\mathrm{Vect}^{2+}_{\mathbb{R}}(S^k) = \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(2)) \cong \pi_{k-1}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } k = 2; \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, tj. za $k \neq 2$ svako realno planarno orijentisano raslojenje je trivijalno $\underline{2}$.

5. $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $k = 2$. Pokazano je da ima $\mathbb{Z}$ klasa, $\mathrm{Vect}^{2+}_{\mathbb{R}}(S^2) = \{\sigma_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Tako: $\sigma_0 = \underline{2}$, $\sigma_1 = [\gamma^{\mathbb{R}}_1]$ (dekompleksifikovano kompleksno γ_1 raslojenje). Važi i $\sigma^-_m = \sigma_{-m}$, tj. promena orijentacije dovodi do suprotnog raslojenja (očigledno se obrće smer petlji).

[1] $\pi_0(X)$ je skup komponenti povezanosti, i nije grupa; za povezan skup je to jednočlani skup $\{*\}$. Trivijalna grupa, $\boldsymbol{C}_1$ sa samo neutralnim elementom je obeležena kao 0.

6. $k = 3$. Znajući da je kod Lie-jevih grupa $\pi_1(G)$ Abelova grupa, a $\pi_2(G) = 0$ (trivijalna), jasno je da je svako vektorsko raslojenje nad S^3 trivijalno (N.B. Svako raslojenje nad S^k za $k > 1$ je orijentabilno; to se dokazuje na drugi način):
$\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^3) \cong \pi_2(U(n)) = 0$, $\mathrm{Vect}^{n+}_{\mathbb{R}}(S^3) \cong \pi_2(\mathrm{SO}(n)) = 0$.

Pri dodavanju linijskog trivijalnog raslojenja, jasno je da se prethodni sloj može utopiti u naredni, čime se dobija niz

$$\to \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k) \to \mathrm{Vect}^{n+1}_{\mathbb{C}}(S^k) \to,$$

koji je izomorfizmima povezan sa nizom

$$\to \pi_{k-1}(U(n)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_{k-1}(U(n+1)) \to .$$

Pri tome ulaganje slojeva ($\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^{n+1}$) daje raslojenje koje raslojenju E_A (sa nesingularnim matricama zašivanja A) u $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k)$ dodeljuje raslojenje $\varphi(E_A) = E_{\varphi_*(A)}$ gde su matrice $\varphi_*(A) = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Na sličan način je i niz

$$\to \mathrm{Vect}^{n+}_{\mathbb{R}}(S^k) \to \mathrm{Vect}^{(n+1)+}_{\mathbb{R}}(S^k) \to$$

izomorfizmima povezan sa nizom

$$\to \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(n)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(n+1)) \to .$$

Specijalno, za $n = k = 2$, ovo je $\cdots \to \mathrm{Vect}^{2+}_{\mathbb{R}}(S^2) \to \mathrm{Vect}^{3+}_{\mathbb{R}}(S^2) \cdots$ i $\cdots \to \pi_1(\mathrm{SO}(2)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(\mathrm{SO}(3)) \to \cdots$, a ovaj poslednji je zapravo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$. To znači da raslojenja σ_m pri utapanju postaju ekvivalentna ako im je ista parnost, što takođe znači da se gube razlike u parnosti, pošto σ_m i σ_{-m} pripadaju istoj klasi u višoj dimenziji.

4 Grotendikov funktor

Teorem 8 *Ako je $(A, \oplus)$ komutativna polugrupa, postoji komutativna (*Grotendikova*) grupa $G(A)$ i morfizam $\varphi : A \to G(A)$ sa svojstvom univerzalnosti: ako je H bilo koja komutativna grupa i $f : A \to H$ bilo koji morfizam, onda postoji jedinstven morfizam grupa $\overline{f}$ takav da je $\overline{f} \circ \varphi = f$, tj.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & G(A) \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & H & \end{tikzcd} .$$

▬*Dokaz:* U $A \times A$ treba uvesti relaciju ekvivalencije i na klasama kvocijentnu operaciju. Od prirodnih do celih brojeva ekvivalencija je: $(a, b) \sim (c, d)$ AKKO $a \oplus d = b \oplus c$. Refleksivnost i simetričnost očigledni, a tranzitivnost sledi iz: $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$, tada je

$a\oplus d = b\oplus c$ i $d\oplus e = c\oplus f$, pa se (sabiranjem jednakosti) dobija $a\oplus d\oplus c\oplus f = b\oplus c\oplus d\oplus e$. Da bi se dobilo $(a,b)\sim(e,f)$ potrebno je skratiti d i c sa obe strane. Kod prirodnih brojeva jeste, ali u opštem slučaju to nije dozvoljeno, pa se uključuje u definiciju: $(a,b)\sim(c,d)$ AKKO $a\oplus d\oplus x = b\oplus c\oplus x$ za neko x. Klase ekvivalencije daju grupu $G(A) = A\times A/_{\sim}$ sa kvocijentnom operacijom $+$: $[(a,b)]+[(c,d)] \stackrel{\text{def}}{=} [(a\oplus c, b\oplus d)]$; uz oznaku $[(a,b)] = a-b$, ovo postaje $(a-b)+(c-d) = a\oplus c - b\oplus d$. Komutativnost i asocijativnost nasleđeni, neutralni element je $0=[(a,a)] = a-a$, a inverzni $-(a-b) = b-a$, tj. $-[(a,b)] = [(b,a)]$. Postojanje morfizma φ: $\varphi(a) = a\oplus a - a$ jer je $\varphi(a\oplus b) = a\oplus b\oplus a\oplus b - a\oplus b = a\oplus a - a + b\oplus b - b = \varphi(a)+\varphi(b)$.
Univerzalnost φ: ako je $A\xrightarrow{f} H$ definiše se $\overline{f}(a-b) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)-f(b)$ (levo je oznaka za klasu u G, desno operacija u H) i proveri da je to morfizam, a onda $\overline{f}(\varphi(a)) = \overline{f}(a\oplus a - a) = f(a\oplus a) - f(a) = f(a)+f(a)-f(a) = f(a)$ pokazuje jedinstvenost (zatvaranje trougla). ∎

Univerzalnost znači da svaka grupa koja sadrži homomorfni lik A, sadrži homomorfni lik Grotendikova grupa $G(A)$ (kao najopštije grupe homomorfbe sa A. Pri tome "održava"morfizme: ako je $A\xrightarrow{\alpha} B$ morfizam polugrupa, uz Grotendikova preslikavanja $A\xrightarrow{\varphi} G(A)$ i $B\xrightarrow{\psi} G(B)$, onda je preslikavanje α_* koje zatvara dijagram (komutativni)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ G(A) \arrow[r, dotted, "\alpha_*"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

dobro definisano, homomorfizam je $\alpha_*(a-a') \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(a)-\alpha(a')$, održava neutralni element. Važi i kompozicija, $(\beta\circ\alpha)_* = \beta_*\circ\alpha_*$, tj. $\text{CommSemigroups} \xrightarrow{\text{Grotendieck}} \text{CommGroups}$ je kovarinatni *Grotendikov funktor*.

Dodatno, ako je A poluprsten, množenje se prenosi i na klase, $(a-b)\cdot(c-d) \stackrel{\text{def}}{=} (a\otimes c)\oplus(b\otimes d) - ((a\otimes d)\oplus(b\otimes c))$, te se iz komutativnog poluprstena dobija komutativni (Grotendikov) prsten (proširenje funktora).

5 K-grupa

Definicija 7 *K-grupa topološkog prostora X je Grotendikova grupa poluprstena Vect(X), $K(X) = G(\text{Vect}(X))$.*

Jasno je da je ovo preslikavanje K kategorije Top topoloških prostora u kategoriju grupa Groups (kontravarijantni) funktor kao kompozicija $K = \text{Grotendieck}\circ\text{Vect}$. Kontravarijantnost nastaje na prvom koraku.

K-grupa je homotopska invarijanta, što je direktna posledica teorema 19, jer za $X\simeq Y$ važi $\text{Vect}(X)\cong\text{Vect}(Y)$, pa je samim tim i $K(X)\cong K(Y)$.

Generalno, K-grupa za kompleksna raslojenja nad X se označava sa $KU(X)$, a za realna sa $KO(X)$.

Primer:

1. $X = *$: $\mathrm{Vect}(*) = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots\} = \mathbb{N}_0$, a $G(\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$ (klasični primer), pa je $K(*) = \mathbb{Z}$.

2. $X \simeq Y$ povlači $K(X) \cong K(Y)$.

3. Sfere: $K(S^3) = \mathbb{Z}$, $KU(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $KO(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

4. Ako je A grupa, onda je $G(A) \cong A$.
   Naime, za homomorfizam $\varphi(a) = a \oplus a - a$ važi: za neutralni element $0' \in A$ (pošto je A grupa) je $\varphi(0') = [(0' \oplus 0', 0')] = [(0', 0')] = 0 \in G(A)$ (klasa $x - x$), pa je onda i za b takvo da je $a \oplus b = 0'$ ispunjeno $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a \oplus b) = \varphi(0') = [(0' \oplus 0', 0')] = [(0', 0')] = 0$.

Elementi $K(X)$ su razlike klasa raslojenja, dakle oblika $[E] - [F]$. Posebno, ako je X kompaktan prostor, teorem 4 (svako raslojenje može da se dopuni do trivijalnog, za svako F postoji F_1, takvo da je $F \oplus F_1 = \underline{m}$, $m = \dim F + \dim F_1$) dozvoljava zapis gde je druga klasa trivijalna: $[E] - [F] = ([E] \oplus [F_1]) - ([F] \oplus [F_1]) = [E'] - \underline{m}$.
Primer:

1. Kontraktibilan prostor $X \cong *$. Tada je $K(X) = K(*)$; pošto je $\mathrm{Vect}(*) = \mathbb{N}_0$, onda je $K(*) \cong \mathbb{Z}$.

2. Prethodno važi uvek kada su sva raslojenja trivijalna. Recimo $K(S^3) \cong \mathbb{Z}$, $KU(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

5.1 Redukovana K-grupa

Iz gornjih primera je jasno da $\mathbb{Z}$ uvek dolazi iz trivijalnih raslojenja, nezavisno od X. Zbog toga se ta grupa podrazumeva, i uvodi grupa netrivijalnih klasa. Naime, pošto za svako n postoji $X \times \mathbb{K}^n$ sledi da postoji morfizam polugrupa $\mathrm{Vect}(X) \xrightarrow{\dim} \mathbb{Z}$ (jasno je da je $\dim(\sigma \oplus \tau) = \dim(\sigma) + \dim(\tau)$). Zajedno sa Grotendikovim preslikavanjem definiše morfizam $K(X) \xrightarrow{\overline{\dim}} \mathbb{Z}$ (za K-klasu je onda $\overline{\dim}(\sigma - \tau) = \dim(\sigma) - \dim(\tau)$), tako da je dijagram

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[rr, dotted, "\overline{\dim}"] & & \mathbb{Z} \\ & \mathrm{Vect}(X) \arrow[ul, "G"] \arrow[ur, "\dim"'] & \end{tikzcd}$$

komutativan. Tada je *redukovana K-grupa* $\widetilde{K}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\overline{\dim})$.

Teorem 9 *$K(X) = \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$, a $0 \longrightarrow \widetilde{K}(X) \hookrightarrow K(X) \rightleftarrows \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$ je cepajući KTN.*

N.B.

1. $\widetilde{K}(X)$ je i prsten (tenzorski proizvod je kompatibilan sa relacijom ekvivalencije).

2. $\widetilde{K}(X)$ je (kontravarijantni) funktor:
$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}^*"'] & K(Y) \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, "\overline{\dim}"] & \\
\widetilde{K}(X) \arrow[r] & K(X) \arrow[r, "\overline{\dim}"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$
(Ovde $f : X \to Y$, pa je $\tilde{f}^*$. Zapravo je ovo suženje f^* na kernel homomorfizma f^*. ???Opštije: neka je $f : G \twoheadrightarrow H$ homomorfizam grupa, i neka su $N_G \lhd G$ i $N_H \lhd H$ invarijantne podgrupe (u G i H), takve da su faktor-grupe izomorfne, $G/N_G \cong H/N_H$. Tada postoji homommorfizam $\tilde{f} : N_G \twoheadrightarrow N_H$.)

Elementi $K(X)$ su razlike klasa raslojenja $[E]-[F]$, a specijalno za kompaktna X su to razlike klasa $[E]-\underline{n}$ (tj. par raslojenje i broj). Stoga se za element redukovane grupe $\widetilde{K}(X)$ kompaktnog topoloskog prostora X može uzeti klasa raslojenja oblika $\{E\}=[E]-\underline{\dim}E$. To dalje znači da su dva elementa $\widetilde{K}(X)$ jednaka, $\{E\}=\{F\}$ kad je $[E]\oplus\underline{\dim}F\oplus[G]=[F]\oplus\underline{\dim}E\oplus[G]$ (za neko raslojenje G).; dalje, pošto zbog kompaktnosti X postoji dopunaG' do trivijalnog raslojenja, ovo znači da je $E\oplus\underline{m}\cong F\oplus\underline{n}$ (za neko m i n), tj. da se raslojenja koja su iz iste klase $\widetilde{K}(X)$ za kompaktno X mogu dovesti do izomorfnih dodavanjem trivijalnih raslojenja, tj. elementi redukovane K-grupe su klase stabilno ekvivalentnih raslojenja, gde je

Definicija 8 *Raslojenja E i F nad X su* stabilno ekvivalentna (stabilno izomorfna) *ako postoje $m,n\in\mathbb{N}_0$ takvi da je $E\oplus\underline{m}\cong F\oplus\underline{n}$.*

U skupu $\mathrm{Vect}(X)=\bigsqcup_{n=0}^{\infty}\mathrm{Vect}^n(X)$ dodavanjem trivijalnog jednodimenzionalnog raslojenja, $\sigma\mapsto\sigma\oplus\underline{1}$, uveden je niz preslikavanja

$$\cdots \;\to\; \mathrm{Vect}^n(X) \;\to\; \mathrm{Vect}^{n+1}(X) \;\to\; \cdots$$

Redukovana K-grupa je $\widetilde{K}(X)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Vect}^n(X)$, gde je *direktni limes* niza definisan kao skup klasa (nizova) raslojenja, gde se ekvivalentnima smatraju raslojenja čiji se nizovi za dovoljno veliko n izjednače.

6 Botova periodičnost

Posmatraju se niz kompleksnih raslojenja:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}^0_{\mathbb{C}}(S^m) \arrow[r] & \mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(S^m) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^m) \arrow[r] & \mathrm{Vect}^{n+1}_{\mathbb{C}}(S^m) \arrow[r] & \cdots \\
\pi_{m-1}(U(0)) \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\varphi^0_*"] & \pi_{m-1}(U(1)) \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\varphi^1_*"] & \cdots \arrow[r, "\varphi^{n-1}_*"] & \pi_{m-1}(U(n)) \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\varphi^n_*"] & \pi_{m-1}(U(n+1)) \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\varphi^{n+1}_*"] & \cdots
\end{tikzcd} \quad (1)$$

i analogni niz realnih raslojenja:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{Vect}^0_{\mathbb{R}}(S^m) & \to & \mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(S^m) & \to & \cdots & \to & \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(S^m) & \to & \mathrm{Vect}^{n+1}_{\mathbb{R}}(S^m) & \to & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\pi_{m-1}(O(0)) & \xrightarrow{\varphi^0_*} & \pi_{m-1}(O(1)) & \xrightarrow{\varphi^1_*} & \cdots & \xrightarrow{\varphi^{n-1}_*} & \pi_{m-1}(O(n)) & \xrightarrow{\varphi^n_*} & \pi_{m-1}(O(n+1)) & \xrightarrow{\varphi^{n+1}_*} & \cdots
\end{array} \tag{2}$$

Dok su u prvom vertikalni morfizmi izomorfizmi (bijekcije), u drugom zbog postojanja orijentacije, u slučajevima u kojima nema izomorfizama raslojenja koji obrću orijentaciju (i time ih stavljaju u istu klasu) preslikavanje je 2 na 1, inače bijektivno. Međutim, pri ulagamju u višu dimenziju (dodavanjem trivijalnog raslojenja) uspostavlja se veza orijentacija, i pojavljuje se bijektivnost (i svuda nadesno)

Teorem 10 *Za dovoljno veliko n* φ^n_* *postaje izomorfizam (uvek je homomorfizam), pa se nizovi* $\pi_{m-1}(U(n))$*, odnosno* $\pi_{m-1}(O(n))$ stabilizuju *u grupe označene respektivno sa*

$$\begin{aligned}
\pi_{m-1}(U) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \pi_{m-1}(U(n)) = \lim_{n\to\infty} Vect^n_{\mathbb{C}}(S^m) = \widetilde{KU}(S^m), \\
\pi_{m-1}(O) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \pi_{m-1}(O(n)) = \lim_{n\to\infty} Vect^n_{\mathbb{R}}(S^m) = \widetilde{KO}(S^m),
\end{aligned}$$

za koje važi Bott-ova periodičnost*:*

$$\pi_i(U) = \pi_{i+2}(U), \quad \pi_i(O) = \pi_{i+8}(O). \tag{3}$$

Pri tome je $\pi_0(U) = 0$*,* $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$*, a* $\pi_0(O) = \pi_1(O) = \mathbb{Z}_2$*,* $\pi_3(O) = \pi_7(O) = \mathbb{Z}$*,* $\pi_2(O) = \pi_4(O) = \pi_5(O) = \pi_6(O) = 0$*.*

Uopštenje Botove periodičnosti za kompaktni topološki prostor X je preko uzastopnih suspenzija:

$$\widetilde{KU}(X) = \widetilde{KU}(S^2(X)), \quad \widetilde{KO}(X) = \widetilde{KO}(S^8(X)). \tag{4}$$

Teorem 11 *Neka X kompaktan prostor, A njegov potprostor i q projekcija, tj.* $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{q}{\twoheadrightarrow} X/A$ *. Tada je* $\widetilde{K}(A) \xleftarrow{i^*} \widetilde{K}(X) \xleftarrow{q^*} \widetilde{K}(X/A)$ *tačan niz abelovih grupa.*

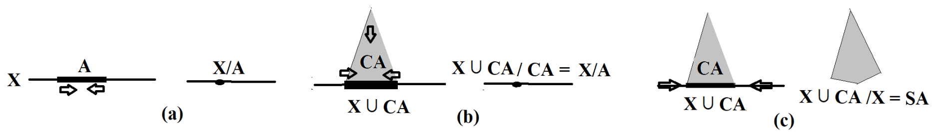
▬*Dokaz:* Poučeno sa X/A gde je A projektovan u tačku, svako raslojenje na X/A je na A trivijalno, $A \times \mathbb{K}^n$. Sa druge strane, raslojenje nad X se povlači inkluzijom i^* u trivijalno na A samo ako je njegovo suženje na Atrivijalno. Tako je $\operatorname{im} q^* = \ker i^*$. ▮

7 K-teorija torusa

7.1 Dugi tačan niz K-teorije

Teorem 12 *U slučaju kada je topološki prostor buket dva kompaktna prostora, $X = A \vee B$, važi da je $\widetilde{K}(B) \xrightarrow{q_A^*} \widetilde{K}(A \vee B) \xrightarrow{i_A^*} \widetilde{K}(A)$ KTNC, pa je posledično $\widetilde{K}(A \vee B) = \widetilde{K}(A) \oplus \widetilde{K}(B)$.*

▬*Dokaz:* Nizovi $A \overset{i_A}{\hookrightarrow} A \vee B \overset{q_A}{\twoheadrightarrow} B$ i $B \overset{i_B}{\hookrightarrow} A \vee B \overset{q_B}{\twoheadrightarrow} A$, sa relacijama $q_B \circ i_A = \mathbb{1}_A$ i $q_A \circ i_B = \mathbb{1}_B$, omogućavaju primenu teorema 11, i to u OBA smera: $\widetilde{K}(B) \underset{i_B^*}{\overset{q_A^*}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(A \vee B) \underset{q_B^*}{\overset{i_A^*}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(A)$. Iz navedenih kompozicija i (kontravarijantne) funktorijalnosti svih (uvedenih) strelica sledi $i_B^* \circ q_A^* = (q_A \circ i_B)^* = \mathbb{1}_B^* = \mathbb{1}_{\widetilde{K}(B)}$, pa je kompozicija bijektivna, a time q_A^* mono i i_B^* epi, a što dozvoljava da se sleva doda $0 \rightarrow$, a (korišćenjem suprotnog smera) sdesna $\rightarrow 0$. Time se dobija KTN uz cepanje (q_A^*, odnosno q_B^*), i primeni se Teorem 18. ▮



Slika 1: Uz Teorem 13: (a) Kontrakcija prostora X po potprostoru A. (b) i (c): kontrakcija prostora $X \cup CA$ po CA i X.

Teorem 13 *Ako je A zatvoreni potprostor kompaktnog topološkog prostora X, tada je dugi tačan niz (DTN) K-grupa:*

$$\cdots\ \widetilde{K}(S^{m+1}(X/A)) \to \widetilde{K}(S^{m+1}(X)) \to \widetilde{K}(S^{m+1}(A)) \to \widetilde{K}(S^{m}(X/A)) \to \widetilde{K}(S^{m}(X)) \to \widetilde{K}(S^{m}(A))\ \cdots$$

$$\cdots \to \widetilde{K}(S(X/A)) \to \widetilde{K}(S(X)) \to \widetilde{K}(S(A)) \to \widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

▬*Dokaz:* (Skica) Iz $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{q}{\twoheadrightarrow} X/A$ sledi (Teorem 11) $\widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A)$. Pošto je $X \subset X \cup CA$, može se uočiti tačni niz $X \hookrightarrow X \cup CA \twoheadrightarrow X \cup CA/X$, kome je dualan niz $\widetilde{K}(X \cup CA/X) \longrightarrow \widetilde{K}(X \cup CA) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$. Sa slike 1 je jasno da je $X \cup CA/_X \cong SA$, te su im redukvane grupe iste, i to se zamenjuje na početku niza; dalje, zbog kontraktibilnosti CA (primer 1 za konus), teorem 22 homotopski izjednačuje $X \cup CA$ i $X \cup CA/CA$ (ako CA nije nepristojan), pa je $X \cup CA \simeq X \cup CA/CA \cong X/A$ (slika 1), i to se koristi u srednjem članu niza. Dakle, niz postaje $\widetilde{K}(SA) \longrightarrow \widetilde{K}(X/A) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$. Time se dobija četvrti član sdesna niza (u drugom redu iskaza teorema). Ideja širenja niza nalevo se nastavlja: par A, B (treći skup je njihov količnik B/A) se zamenjuje parom $B, B \cup CA$, a treći je njihov količnik $B \cup CA/B$). U prethodnom koraku je početni niz

(A, X) sa X/A dao je $(X, X \cup CA)$ (sa $X \cup CA/X$), pa je naredni $(X \cup CA, (X \cup CA) \cup CX)$, sa $((X \cup CA) \cup CX)/(X \cup CA)$. Tako da se zapravo trojke $(A, X, X/A)$ u narednom koraku zamene trojkom njihovih suspenzija. ∎

Rezultat Teorema 13 se može primeniti na proizvod topoloških prostora, pri čemu je kontrahujući potprostor buket faktora shvaćenih u smislu potprostora proizvoda (kao na slici 4 (f)), čijom kontrakcijom se dobija stisnuti proizvod. Dakle, početni niz je $X \vee Y \xhookrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{q} X \wedge Y$, sa dualnim $\widetilde{K}(X \wedge Y) \to \widetilde{K}(X \times Y) \to \widetilde{K}(X \vee Y)$. U dobijenom nizu se mogu iskoristiti neka od ranije izvedenih pravila: Teorem 12 odmah pokazuje da je prvi (sdesna) član K-niza $\widetilde{K}(X \vee Y) = \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)$; no to se prenosi i na suspenzije ovog člana, jer je $S(X \vee Y) \simeq \Sigma(X \vee Y) = \Sigma(X) \vee \Sigma(Y) \simeq S(X) \vee S(Y)$, zbog čega je $\widetilde{K}(S(X \vee Y)) = \widetilde{K}(S(X)) \oplus \widetilde{K}(S(Y))$, i

$$\begin{gathered}
\cdots\ \widetilde{K}(S^{m+1}(X \wedge Y)) \to \widetilde{K}(S^{m+1}(X \times Y)) \longrightarrow \widetilde{K}(S^{m+1}(X)) \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}(Y)) \ \to \\
\to\ \widetilde{K}(S^{m}(X \wedge Y)) \to \widetilde{K}(S^{m}(X \times Y)) \longrightarrow \widetilde{K}(S^{m}(X)) \oplus \widetilde{K}(S^{m}(Y)) \ \to \cdots \\
\cdots \to\ \widetilde{K}(S(X \wedge Y))) \longrightarrow \widetilde{K}(S(X \times Y)) \longrightarrow \widetilde{K}(S(X)) \oplus \widetilde{K}(S(Y)) \ \to \\
\to\ \widetilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y) \to \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)\ .
\end{gathered} \tag{5}$$

Ako su j_X i j_Y ulaganja X i Y u $X \times Y$ (definisana sa $j_X : x \mapsto (x, y_0)$ i $j_Y : y \mapsto (x_0, y)$), dok su p_X i p_Y prirodne projekcije $X \times Y$ na X, odnosno Y (tj. $p_X : (x, y) \mapsto x$ i $p_Y : (x, y) \mapsto y$), jasno je da je $p_X \circ j_X = \mathbb{1}_X$ i $p_Y \circ j_Y = \mathbb{1}_Y$, dok su ukrštene kompozicije konstantna preslikavanja ($p_X \circ j_Y : y \mapsto x_0$, $p_Y \circ j_X : x \mapsto y_0$). Stoga, za povučena preslikavanja među K-grupama u poslednjem delu niza, $\widetilde{K}(X \times Y) \underset{p_X^* + p_Y^*}{\overset{(j_X^*, j_Y^*)}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)$ važi $(j_X^*, j_Y^*) \circ (p_X^* + p_Y^*) = \mathbb{1}_{\widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)}$, što pokazuje da je niz cepajući. Na sličan način se to svojstvo pokazuje i na svakom trećem (nalevo) članu $\widetilde{K}(S^m(X \times Y)) \underset{p^*}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(S^m(X)) \oplus \widetilde{K}(S^m(Y))$. Zapravo, DTN raspada na KTNC za svako $m = 0, 1, \ldots$ (nulta suspenzija je početni prostor):

$$0 \to \widetilde{K}(S^m(X \wedge Y)) \to \widetilde{K}(S^m(X \times Y)) \underset{p^*}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(S^m(X)) \oplus \widetilde{K}(S^m(Y)) \to 0\ . \tag{6}$$

Naime, jasno je da su projekcija p_X i p_Y surjektivne. Pošto je $j^* \circ p^*$ bijekcija (identitet), j^* je "NA", pa je niz (6) je tačan na četvrtom mestu (računaju se obe nule, pa niz ima ukupno pet mesta). Zato je j^* "NA"i tri mesta levo u DTN (kad je $m+1$ umesto m). Takođe, sledeća strelica u tačnom nizu (5) je trivijalan homomorfizam (ovo je tvrđenje 2 Teorema 15); opet, na osnovu stava 1 Teorema 15, sledeća strelica u dugom tačnom nizu je "1-1", pa e niz (6) tačan i na drugom mestu. I konačno, p^* nam daje cepanje niza (6).

Iz prethodnog izraza (6) sledi (podrazumeva se kompaktnost X i Y u nastavku)

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \widetilde{K}(S^m(X \times Y)) = \widetilde{K}(S^m(X \wedge Y)) \oplus \widetilde{K}(S^m(X)) \oplus \widetilde{K}(S^m(Y)). \tag{7}$$

Ovo je faktorizacija koja će biti korišćena u specijalnom slučaju $X = S^1$, tj. $\widetilde{K}(S^m(S^1 \times Y)) = \widetilde{K}(S^m(S^1 \wedge Y)) \oplus \widetilde{K}(S^m(S^1)) \oplus \widetilde{K}(S^m(Y))$, odnosno

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \widetilde{K}(S^m(S^1 \times Y)) = \widetilde{K}(S^{m+1}(Y)) \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}) \oplus \widetilde{K}(S^m(Y)) \tag{8}$$

(za prvi deo jednakosti videti poslednji primer za definiciju 14). Ova jednakost daje vezu K-grupa torusa i sfera zamenom $Y = T^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$:

Teorem 14

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall m \in \mathbb{N}_0) \quad \widetilde{K}(S^m(T^n)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{n}{i}}$$

(eksponent x znaci x-ti direktni stepen grupa, tj. za Abelove grupe direktni zbir x jednakih grupa).

▬*Dokaz:* Matematičkom indukcijom po n.
Za $n = 1$ je u pitanju je identitet $\widetilde{K}(S^m(S^1)) = \widetilde{K}(S^{m+1}) = \oplus_{i=1}^{1}\widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{1}{i}} = \widetilde{K}(S^m(S^1))$.
Dalje, je $LS = \widetilde{K}(S^m(T^n)) = \widetilde{K}(S^m(S^1 \times T^{n-1}))$, pa je po (8)
$LS = \widetilde{K}(S^{m+1}(T^{n-1})) \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}) \oplus \widetilde{K}(S^m(T^{n-1}))$. Koristeći teorem za niže redove u prvom i poslednjem sabirku dobije se:

$$\begin{aligned}
LS \quad &= \quad \bigoplus_{i=1}^{n-1} \widetilde{K}(S^{m+1+i})^{\binom{n-1}{i}} \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{n-1}{i}} \\
&\stackrel{i \mapsto i+1 \text{ u I}}{=} \quad \bigoplus_{i=2}^{n} \widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{n-1}{i-1}} \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{n-1}{i}} \\
&\stackrel{A}{=} \quad \bigoplus_{i=2}^{n} \widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}} \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}) \oplus \widetilde{K}(S^{m+1})^{n-1} \\
&\stackrel{B}{=} \quad \bigoplus_{i=2}^{n} \widetilde{K}(S^{m+i})^{\binom{n}{i}} \oplus \widetilde{K}(S^{m+1}) \oplus \widetilde{K}(S^{m+1})^{n-1}
\end{aligned}$$

U A je primenjeno da je u trećem članu (III) prvo izdvojen sabirak $i = 1$ (i ostavljen na kraju), a u ostatku je, znajući da je $\binom{a}{b} = 0$ za $b > a$, gornja granica povećana na n, i zatim je sabran sa I. U B je samo iskorišćen identitet za binomne koeficijente. Pošto II i III daju $\widetilde{K}(S^{m+1})^n$, a to je upravo $i = 1$ sabirak u I, pokazano je važenje za n. ▮

Na osnovu ovog rezultata i Botove periodičnosti (Teorem 10) lako se izvode komplesne i realne K-krupe torusa:

1. $\widetilde{KU}(T^1) = 0$;
2. $\widetilde{KU}(T^2) = \widetilde{KU}(S^1)^2 \oplus \widetilde{KU}(S^2) = \mathbb{Z}$;
3. $\widetilde{KU}(T^3) = \widetilde{KU}(S^1)^3 \oplus \widetilde{KU}(S^2)^3 \oplus \widetilde{KU}(S^3) = \mathbb{Z}^3$
4. Generalno: $\widetilde{KU}(T^n) = \mathbb{Z}^{2^{n-1}-1}$, odnosno $KU(T^n) = \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$. Uočiti da samo i parno daje doprinos $\mathbb{Z}$, pa je potrebno uzeti parne sabirke i odgovarajuće binomne koeficijente;
5. $\widetilde{KO}(T^1) = \mathbb{Z}_2$;

6. $\widetilde{KO}(T^2) = \widetilde{KO}(S^1)^2 \oplus \widetilde{KO}(S^2) = \mathbb{Z}_2^3$;

7. $\widetilde{KO}(T^3) = \widetilde{KO}(S^1)^3 \oplus \widetilde{KO}(S^2)^3 \oplus \widetilde{KO}(S^3) = \mathbb{Z}_2^6$;

8. $\widetilde{KO}(T^4) = \mathbb{Z}_2^{10} \oplus \mathbb{Z}$;

9. $\widetilde{KO}(T^5) = \mathbb{Z}_2^{15} \oplus \mathbb{Z}^5$;

10. Generalno: $\widetilde{KO}(T^n) = \mathbb{Z}^{a_n} \oplus \mathbb{Z}_2^{b_n}$, za $a_n = 2^{n-2} - 1 + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{n\pi}{4}$, $b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{2+8k}$.

A Kategorije i funktori

Kategorija C obuhvata objekte (iste matematičke strukture) $\mathrm{Ob}(C)$ i morfizme među njima $\mathrm{Hom}(C)$. Pri tome mora postojati identično preslikavanje $\mathbb{1}_A$ za svaki objekat A, a morfizmi se asocijativno komponuju. Primeri: GROUPS (skup grupa sa homomorfizmima), TOP (topološki prostori i neprekidna preslikavanja), ...

Funktor je morfizam kategorija: ako su C i D kategorije i T funktor, $C \xrightarrow{T} D$, tada za $A \in \mathrm{Ob}(C)$ je $T(A) \in \mathrm{Ob}(D)$, za svaki objekat A iz kategorije C je $T(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{T(A)}$, i ako je $A \xrightarrow{f} B$ morfizam u kategoriji C, onda je $T(f)$ morfizam medju likovima i to *kovarijantan* ako je $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B)$, odnosno *kontravarijantan* ako je $T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A)$ (preslikavanje morfizama $T(f)$ može se označiti i sa f_*, odnosno f^* za ko- i kontra-varijantne funktore).

Osobine:

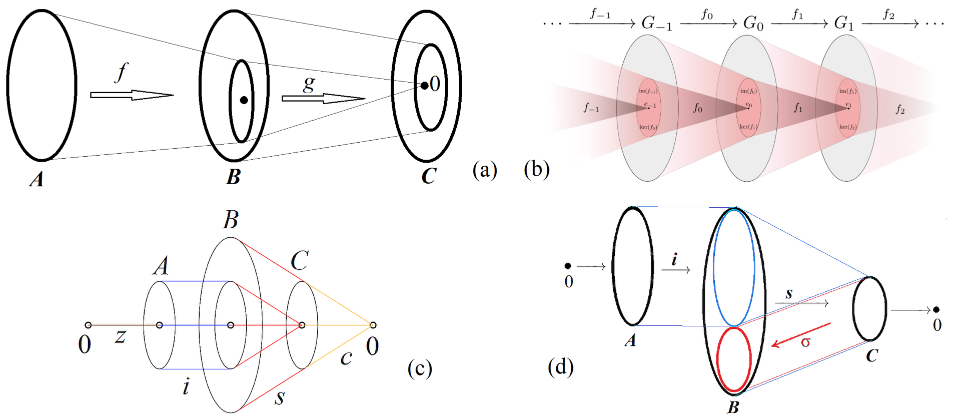
- Na jeziku komutativnih dijagrama ko- i kontra-varijantni funktori zadovoljavaju:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & B \arrow[dl, "g"] & \xrightarrow{T} & T(A) \arrow[rr, "T(f)"] \arrow[dr, "T(g\circ f)=T(g)\circ T(f)"'] & & T(B) \arrow[dl, "T(g)"] \\
& C & & & & T(C) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & B \arrow[dl, "g"] & \xrightarrow{T} & T(A) & & T(B) \arrow[ll, "T(f)"'] \\
& C & & & & T(C) \arrow[ul, "T(g\circ f)=T(f)\circ T(g)"] \arrow[ur, "T(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

B Tačni nizovi

Definicija 9 *$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ je tačan niz (u B) ako je $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$. $0 \xrightarrow{z} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{c} 0$ (pedantnije: $0 \xrightarrow{z} A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C \xrightarrow{c} 0$) je kratak tačan niz (KTN) ako je tačan u A, B i C. KTN se cepa ako postoji homomorfizam $\sigma : C \to B$, takav da je $g \circ \sigma = \mathbb{1}_C$ (tj. $0 \xrightarrow{z} A \hookrightarrow B \underset{\sigma}{\overset{s}{\rightleftarrows}} C \xrightarrow{c} 0$).*



Slika 2: (a) Niz tačan B, (b) generalizacija, beskonačan tačan niz (u svakoj tački, (c) KTN (sa preslikavanjima *z*ero, *i*njection, *s*urjection i *c*onstant, (d) Cepajuci KTN. (b i c su sa wikipedije.)

Teorem 15 *Za tačan niz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ važi: 1. $f = 0$ AKKO je g injekcija; 2. $g = 0$ AKKO je f surjekcija.*

Primeri:

1. Za Abelove grupe A i C važi $0 \xrightarrow{z} A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{s=\pi_2} C \xrightarrow{c} 0$ ($i : a \mapsto (a, 0)$ (ulaganje), $\pi_2 : (a, c) \mapsto c$ (druga projekcija).

2. $0 \xrightarrow{z} \mathbb{Z} \xrightarrow{i=n} \mathbb{Z} \xrightarrow{s=\rho_n} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{c} 0$: preslikavanje "množenje celih brojeva sa $n$daje podskup brojeva deljivih sa n u $\mathbb{Z}$ (izomorfan sa $\mathbb{Z}$), a preslikavanje ρ_n, "ostatak pri deljenju sa n", preslikava $\mathbb{Z}$ NA $\mathbb{Z}_n$.

3. Za svaki morfizam $A \xrightarrow{f} B$ imamo KTN $0 \xrightarrow{z} \ker f \hookrightarrow A \xrightarrow{f} \operatorname{im} f \xrightarrow{c} 0$

4. Ako za Abelove grupe važi $B = A \oplus C$, onda je $0 \xrightarrow{z} A \hookrightarrow A \oplus C \twoheadrightarrow C \xrightarrow{c} 0$ (i $0 \xrightarrow{z} C \hookrightarrow A \oplus C \twoheadrightarrow A \xrightarrow{c} 0$). Jasno je da tada $\sigma : c \mapsto (0, c)$ homomorfizam cepanja.

5. Ako je $T \lhd G$ (invarijantna podgrupa T u G), onda je $0 \xrightarrow{z} T \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/T \xrightarrow{c} 0$ (G/H faktor grupa).

C Slobodna Abelova grupa

Definicija 10 *Slobodna Abelova grupa F nad skupom S je direktni zbir*[2] *grupa $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^N$ (ukupno $|S|$ sabiraka); kaže se da je S baza grupe. Operacija u grupi je sabiranje komponenti (u kooordinatnoj notaciji), odnosno sabiranje koeficijenata uz bazisne elemenate.*

N.B.:

1. Slobodne grupe su slične vektorskim prostorima (sa celobrojnim kombinacijama) i u tom kontekstu nose naziv *modulimi*.

2. *Direkni proizvod* N slobodnih grupa je $\mathbb{Z}_1, \dots, \mathbb{Z}_N$ je skup N-torki $(c_1 z_1, \dots, c_N z_N)$, gde su c_i celi brojevi, a z_i elementi i-tog faktora. U slučaju da je N beskonačno, pored proizvoda postoji i *direktni zbir*, u kome je nenulto samo konačno mnogo koordinata $c_i z_i$.

3. Direktni zbir slobodnih grupa je slobodan (proizvod ne mora biti).

Teorem 16 *Neka je F slobodna Abelova grupa nad S i φ ulaganje S u F. Za svaku Abelovu grupu G i svako preslikavanje $\psi : S \to G$ postoji jedinstveni homomorfizam $f : F \to G$ takav da je $\forall s \in S\ f(\varphi(s)) = \psi(s)$, tj. dijagram*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, dotted, "f"] & & G \\ & S \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

je komutativan.

Teorem 17 *Ako je C slobodna, KTN $0 \xrightarrow{z} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{c} 0$ se cepa.*

▬*Dokaz:* Neka je $C' = \{c_1, c_2, \dots\}$ baza u C. Na osnovu teorema 16 postoji preslikavanje $C \xrightarrow{\sigma} B$: za bilo koje bazne elemente c_i se odaberu neki b_i takvi da je $s(b_i) = c_i$ (postoje takvi b_i jer je s surjekcija), čime je definisano $\psi(c_i) = b_i$ (iz teorema 16), pa teorem 16 daje i σ (zbog surjekcije s, postoji ψ u dijagramu

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, dotted, "\sigma"] & & B \\ & S \arrow[ul] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

). Dalje, za svaki bazni element c_i važi $b_i = \sigma(\varphi(c_i)) = \sigma(c_i)$ važi $s(\sigma(c_i)) = s(b_i) = c_i$. ▮

[2]Ovo je ad hoc definicija, inače ide preko univerzalnosti, koja je ovde data kao teorem 16.

Teorem 18 *Ako je* $0 \xrightarrow{z} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{c} 0$ *cepajući niz Abelovih grupa, onda je* $B \cong A \oplus C$.

▬*Dokaz:* Jasno je da je $(a, c) \mapsto i(a) + \sigma(c)$ preslikavanje $A \oplus C \xrightarrow{i+\sigma} B$, pri čemu je homomorfizam jer su to i i i σ. Monomorfizam (kernel je 0): neka je $0 = i(a) + \sigma(c)$; onda je i lik $s(0) = 0$, ali $0 = si(a) + s\sigma(c) = 0 + c$ (niz tacan u B, tj. $si = 0$) povlači $c = 0$, pa samim tim sledi $i(a) = 0$; kako je i injekcija, mora biti a=0. Surjekcija: $b = (b - \sigma(s(b))) + \sigma(s(b))$, prvi sabirak $b - \sigma(s(b))$ mora da bude lik nekog elementa iz A, jer je iz $\ker s$, tj. $s(b - \sigma(s(b))) = s(b) - s(b) = 0$. ▮

D Neophodni pojmovi iz topologije

D.1 Homotopija

Definicija 11 *Preslikavanja* $X \xrightarrow{f} Y$ *i* $X \xrightarrow{g} Y$ *iz topološkog prostora* X *u topološki prostor* Y *su* homotopna, $f \simeq g$, *ako postoji neprekidno preslikavanje* $X \times I \xrightarrow{H} Y$ *(*$I = [0, 1]$*, interval) takvo da je* $\forall x \in X$ $H(x, 0) = f(x)$ *i* $H(x, 1) = g(x)$. *Prostori* X *i* Y *su* homotopski ekvivalentni (homotopni), $X \simeq Y$, *ako postoje preslikavanja* $X \xrightarrow{f} Y$ *i* $Y \xrightarrow{g} X$ *takva da je* $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ *i* $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$.

Definicija 12 *Toplośki prostor je* kontraktibilan *ako je homotopski ekvivalentan sa tačkom,* $X \simeq *$ *(simbol tačke –* $*$*).*

Primer: svaki disk je kontraktibilan, $D^n \simeq *$ (D^1 je zatvoreni interval, D^2 je krug).

Teorem 19 *Ako je* $f \simeq g$ *onda je* $f^*(E) \cong g^*(E)$.

Posledica je da $X \simeq B$ povlači $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathrm{Vect}(B)$. Naime, iz homotopije f i g, $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ i funktorijalnosti povlačenja sledi $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathbb{1}_X^* = \mathbb{1}_{\mathrm{Vect}(X)}$ i $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathbb{1}_B^* = \mathbb{1}_{\mathrm{Vect}(B)}$, pa je $g^* = (f^*)^{-1}$, i u pitanju je bijekcija, tj. izomorfizam. Drugim rečima:

Teorem 20 *Vect*(X) *je homotopska invarijanta*

Druga posledica je da je $\mathrm{Vect}(*) = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots\}$.

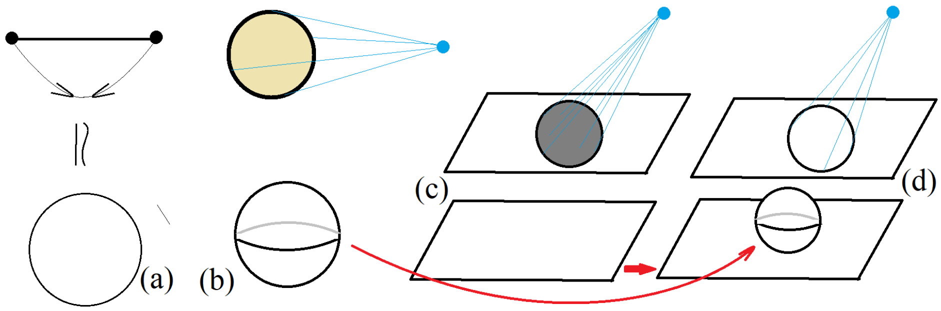
Skup svih homotopskih klasa neprekidnih preslikavanja X u Y se označava sa $[X, Y]$, tj. $[X, Y] = \{f : X \to Y \mid f\text{neprekidno}\}/_{\simeq}$.

Teorem 21 $[X, Y] \cong [X', Y']$ *ako je* $X \cong X'$ *i* $Y \cong Y'$.

Homotopska invarijanta je svako svojstvo topološkog prostora održano pri homotopskim preslikavanjima, tj. zajedničko za klasu homotopije.

D.2 Neke topološke konstrukcije

Neka je A potprostor topološkog prostora X, $A \leq X$. Tada je A-kontrakcija prostora X topološki prostor u kome se A zameni jednom tačkom, a sve ostalo (elementi i otvoreni skupovi) prenosi iz X: $X/A \stackrel{\text{def}}{=} X/_\sim$ gde je relacija ekvivalencije pripadnost A ($x_1 \sim x_2$ AKKO $x_1, x_2 \in A$ ili $x_1 = x_2$). Jasno je da je $X \xrightarrow{q} X/A$ surjekcija, tzv. *projekcija*.



Slika 3: A-kontrakcije za slučajeve (a) $D^1/\partial D^1$, (b) $D^2/\partial D^2$, (c) $\mathbb{R}^2/D^2$ i (d) $\mathbb{R}^2/S^1$. U poslednjem slučaju se delovi projekcije vide u primerima (b) i (c).

Primeri (Fig. 3):

1. $D^n/\partial D^n = S^n$ (za $n = 1$ zatvoreni interval uz identifikaciju krajeva postaje kruznica, krug sa identifikacijom obodne kružnice postaje sfera,...)

2. Ako se u ravni odabere neki disk D^2 i njegove tačke identifikuju, dobija se ta ista ravan $\mathbb{R}^2$).

3. Ako se u ravni odabere neka kružnica S^1 i njene tačke identifikuju, dobija se buket: kruznica podeli ravan na spoljašnji deo (koji povlačenjem pri stezanju kružnice u tačku ostaje $\mathbb{R}^2$, i unutrašnji disk, koji pri povlačenju postane "balon"S^2, te je to konačno ta ista ravan kao tangentna na sferu.

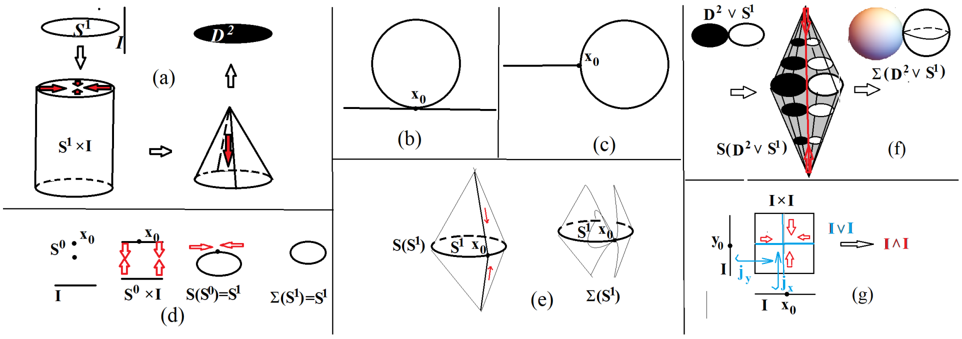
Teorem 22 *Ako je A kontraktibilan, zatvoren i nije "neobičan"*[3] *potprostor u X, onda su X i njegova A-projekcija homotopski ekvivalentni, $X \simeq X/A$.*

[3]Ako nisi NA ili matematičar druge ne možes da smisliš: npr. u kategoriji mnogostrukosti A je (pod)mnogostrukost.

Definicija 13 Suspenzija *SX (ili $S(X)$) topološkog prostora X je topološki prostor $S(X) = X \times I/_{\substack{(x_1,0)\sim(x_2,0)\\(x_1,1)\sim(x_2,1)}}$ (kvocijentni skup po relaciji ekvivalencije). Suspenzija suspenzije je $S^2(X) \stackrel{\text{def}}{=} S(S(X))$ i generalno $S^m(X)$.*

Primer: Očigledno je suspenzija S^1 je S^2, $S(S^1) \cong S^2$, a pokazuje se da je to opšta osobina sfera: $S(S^{k-1}) = S^k$. Jasno je da funkcija zašivanja na S^{k-1} određuje odgovarajuće vektorsko raslojeje. To je specijalni slučaj sledećeg stava.

Teorem 23 *Klasa homotopije preslikavanja topološkog prostora X u nesingularne operatore (dimenzije n) se surjektivno preslikava na vektorska raslojenja (dimenzije n): $[X, GL_n(\mathbb{K})] \twoheadrightarrow Vect^n_{\mathbb{K}}(S(X))$*



Slika 4: Ilustracija konstrukcija: (a) konus kruznice ($CS^1 \simeq D^2$). Buket kruznice i intervala sa baznom tackom (b) u unutrasnjosti ili (c) na kraju. Redukovana suspezija sfera (d) S^0 i (e) S^1. (f) Redukovana suspenzija buketa: $\Sigma(D^2 \vee S^1) = \Sigma(D^2) \vee \Sigma(S^1) = D^3 \vee S^2$.

Definicija 14 *1.* Konus *topološkog prostora X je topološki prostor $CX \stackrel{\text{def}}{=} X \times I/_{X\times\{1\}}$.*
2. Buket *topoloških prostora sa* baznim tačkama *(A, a_0) i (B, b_0) je topološki prostor $A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} A \sqcup B/_{a_0\sim b_0}$.*
3. Redukovana suspenzija *topološkog prostora sa baznom tačkom, (X, x_0), je $\Sigma X \stackrel{\text{def}}{=} X \times I/_{X\times\{0,1\}\cup\{x_0\}\times I} = S(X)/_{\{x_0\}\times I}$.*
4. Stisnuti proizvod (smash product) prostora sa bazama, (X, x_0) i (Y, y_0) je prostor $X \wedge Y \stackrel{\text{def}}{=} X \times Y/_{X\vee Y}$.

.

Primeri (Sl. 4):

1. Konus je "plovina suspenzije, kontrahuje se samo jedan kraj. Lako je videti da je $CX \simeq \{*\}$ (kontraktibilan) za svako X, jer se moze deformisati u tačku koja je u konstrukciji $X \times \{1\}$.

2. $CS^m \simeq D^{m+1}$

3. Buket dve kruznice je "osmica".

4. Buket zavisi od bazne tačke (kod nehomogenih prostora). Tako interval moze imati dva neekvivalentna tipa baznih tačaka: tačke u unutrašnjosti ili na krajevima, i prema tome dva tipa buketa sa kruznicom.

5. $\Sigma S^m = S^{m+1}$.

6. Ako x_0 nije "neobična", važi $S(X)/_{\{x_0\}\times I} \simeq S(X)$, tj. suspenzija i redukovana suspenzija su homotopski ekvivalentne.

7. Saglasnost redukovane suspenzije i buketa: $\Sigma(A \vee B) = \Sigma A \vee \Sigma B$.

8. Stisnuti proizvod dva intervala (sa unutrasnjim baznim tačkama je pravougaonik $\{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]\}$ sa koordinatnim linijama $\{(x, y_0)$ i $\{(x_0, y)\}$ kontrahovanim u jednu tacku. $X \times Y$ je homeomorfan disku D^2, a nakon stiskanja se dobija buket sa 1, 2 ili 4 diska D^2 (ako su obe, jedna ili nijedna tačka rubne).

9. $\Sigma X \cong S^1 \wedge X$, i uopšteno $\Sigma^n X = X \wedge S^n$.